

NASA-TM-75304  
N78-27844

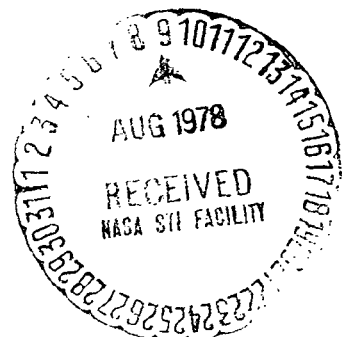
78-25894

A Reproduced Copy  
OF

A77-51267

Reproduced for NASA  
by the

**NASA** Scientific and Technical Information Facility



c24-61

A77-51267 # Numerical Laplace back-transformation for determining system responses of linear systems in the time domain (Numerische Laplace-Rücktransformation zur Bestimmung der Systemantwort linearer Systeme im Zeitbereich). R. Friedrich and W. Drewelow (Rostock, Universität, Rostock, East Germany). *Rostock, Wilhelm-Pieck-Universität, Wissenschaftliche Zeitschrift, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reihe*, vol. 25, no. 8, 1976, p. 887-889, 7 refs. In German.

SYS

MA7

This paper presents a program for the numerical Laplace return transformation. The algorithm described is based on the method of breaking the picture function down to form partial fractions which are then transformed back separately. The sum of the resulting partial functions is the sought time function. Any problems caused by the forms of a system of equations being unfavorable due to the computer configuration are restricted to a large extent by appropriate standardization using an auxiliary parameter. The practical limits for use of the program are reached when the degree of the denominator of the picture function lies within the range of seven to eight.

APPI

(Author)

---

This Abstract Published in  
**INTERNATIONAL AEROSPACE ABSTRACTS**  
Issued by  
**TECHNICAL INFORMATION SERVICE**  
**AMERICAN INSTITUTE OF AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS, INC.**  
**750 THIRD AVENUE, NEW YORK, N.Y. 10017**

A77-51267

## Numerische Laplace-Rücktransformation zur Bestimmung der Systemantwort linearer Systeme im Zeitbereich

von Ralf Friedrich und Wolfgang Drewelow

### 1. Einleitung

Einschwingungsvorgänge spielen in der Technik eine wichtige Rolle. Die mathematische Beschreibung dieser Vorgänge erfolgt durch Differentialgleichungen. Eines der wirksamsten Hilfsmittel für den Techniker bei der Lösung dieser Aufgaben ist die Laplace-Transformation. Die zugehörige Laplace-Rücktransformation bereitet jedoch oft wegen des hohen Rechenaufwandes Schwierigkeiten. Insbesondere dann, wenn diese Einschwingvorgänge für eine größere Anzahl verschiedener Zeitwerte berechnet werden sollen, ergeben sich in praktisch wichtigen Fällen umfangreiche Rechenarbeiten.

Aus diesem Grunde schien es sinnvoll, ein Programm für einen Digitalrechner zu entwickeln, mit dem es möglich ist, aus einer Bildfunktion die zugehörige Funktion im Zeitbereich zu bestimmen und eine Wertetabelle, entsprechend vorgegebener Forderungen, ausdrucken zu lassen. Im Vordergrund standen die wichtigen aperiodischen Systemreaktionen Übergangsfunktion, Gewichtsfunktion und Rampenantwortfunktion. Die Verwendung harmonischer Signale sollte ebenfalls möglich sein.

Ein wichtiges Anwendungsgebiet für dieses Programm ist die Systemidentifikation, da mit dessen Hilfe die Güte verschiedener Verfahren im Zeitbereich gut überprüft werden kann. Des weiteren kann das Programm beim Untersuchen des Führungs- und Störverhaltens geschlossener linearer Regelkreise ebenso erfolgreich eingesetzt werden wie beim Bestimmen der Einschwingvorgänge in elektronischen Schaltungen.

Zur Lösung stand der Kleinrechner Cellatron C 8205 zur Verfügung.

### 2. Grundlagen

Ein lineares System mit konzentrierten Parametern und dem Eingangssignal  $x_e(t)$  bzw. dem Ausgangssignal  $x_a(t)$  wird durch die Differentialgleichung

$$a_n \frac{dx_a^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{dx_a^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x_a(t) = b_m \frac{dx_e^m}{dt^m} + b_{m-1} \frac{dx_e^{m-1}}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x_e(t) \quad (1)$$

beschrieben. Für verschwindende Anfangsbedingungen liefert der Differentiationssatz der Laplace-Transformation

$$\frac{X_a(p)}{X_e(p)} = G(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} \quad (2)$$

$G(p)$  ist dabei die Übertragungsfunktion des linearen Systems in Polynomform. Für die Belange der Regelungstechnik ist jedoch die sogenannte Zeitkonstantenform der Übertragungsfunktion besser geeignet. Beschränkt man sich aus Übersichtlichkeitsgründen vorerst auf reelle Pole und Nullstellen der rationalen Funktion nach Gl. (2), so folgt

$$G(p) = K_L p^L \frac{(1 + p T_{Dn} \dots 1 + p T_{Dm})}{(1 + p T_1 \dots 1 + p T_n)} \quad (3)$$

$L = n - m$

Im Fall konjugiert komplexer Pole oder Nullstellen werden jeweils zwei Klammerausdrücke

$$\left(1 + \frac{p}{\delta_c + j\omega_c}\right) \left(1 + \frac{p}{\delta_c - j\omega_c}\right) = 1 + 2DpT_0 + p^2 T_0^2 \quad (4)$$

zusammengefaßt. Unter Hinzunahme der Laplacetransformation des Eingangssignals erhält man

$$X_a(p) = X_e(p) G(p) \quad (5)$$

Zur Laplace-Rücktransformation von  $X_a(p)$  kann man den Residuensatz heranziehen, jedoch müssen dann für mehrere Pole Differentiationen durchgeführt werden, die auf dem Digitalrechner schlecht zu realisieren sind. Deshalb ist die Zerlegung der Funktion  $X_a(p)$  nach Gl. (3)–(5) in eine Summe von Partialbrüchen das besser geeignete Verfahren.

Man erhält so Brüche der Form

$$\frac{A}{1 + pT} + \frac{B}{1 + pT} + \frac{C}{p^j} + \frac{E}{1 + 2DpT_0 + p^2 T_0^2} + \frac{F \cdot p}{1 + 2DpT_0 + p^2 T_0^2} + \frac{G}{1 + 2DpT_0 + p^2 T_0^2} + \frac{H \cdot p}{1 + 2DpT_0 + p^2 T_0^2} \quad (6)$$

Diese Brüche sind leicht rücktransformierbar [2], die Summe der so entstandenen Zeitfunktionen ist die gesuchte Systemantwort im Zeitbereich.

Als Aufgabe verbleibt, die Konstanten, deren Anzahl gleich dem Nennergrad von  $X_n(p)$  — im folgenden grad — ist, zu bestimmen.

Dazu stehen die Methode des Koeffizientenvergleichs, die Grenzwertmethode und die Einsetzungsmethode zur Verfügung. Die Einsetzungsmethode ist dabei am leichtesten programmierbar und wurde deshalb den anderen Verfahren vorgezogen. Man erhält durch das Einsetzen von grad verschiedene  $p$ -Werten grad linear unabhängige Gleichungen zur Berechnung der grad Konstanten. Die Partialbruchzerlegung in Verbindung mit dem Einsetzungsverfahren als einer rechnerischen Lösungsmethode bildet das Kernstück des im Programm verwendeten Lösungsweges.

### 3. Programmbeschreibung

Nach der Eingabe der erforderlichen aktuellen Parameter (Übertragungsfunktion, gesuchte Systemreaktion, Anforderungen an die auszudruckende Wertetabelle) wird im Rechner auf Grund dieser Eingabewerte die allgemeine Ansatzgleichung zur Partialbruchentwicklung gebildet. In dieser Gleichung, auf deren rechten Seite die zu ermittelnden Koeffizienten der Partialbrüche stehen, werden nach einer bestimmten Bildungsvorschrift grad verschiedene Werte für  $p$  eingesetzt. Auf diese Weise erhält man grad linear unabhängige Gleichungen zur Bestimmung der grad unbekannten Konstanten. Diese Gleichungen bilden den Ausgangspunkt eines Unterprogramms zur Lösung eines linearen Gleichungssystems, am Ende dieses Unterprogramms stehen die gesuchten Konstanten. Diese Konstanten werden nicht erst wieder den entsprechenden Partialbrüchen, sondern gleich den Laplacerücktransformierten dieser Partialbrüche zugeordnet. Dadurch erhält man grad einzelne Zeitfunktionen; die Summe der Zeitfunktionen ist die gesuchte Laplacerücktransformierte von  $X_n(p)$ , die Systemausgangsfunktion im Zeitbereich. Diese Funktion  $x_n(t)$  wird ausgedruckt, anschließend werden entsprechend den eingegebenen Werten für die Schrittweite und obere Berechnungsgrenze Zeitwerte und die dazugehörigen Funktionswerte ermittelt und ausgedruckt.

Dieser prinzipiell richtige Lösungsweg weist jedoch bei der praktischen Realisierung im Rechner wesentliche Mängel bezüglich der Genauigkeit der zu bestimmenden Konstanten und damit der Genauigkeit der zu bestimmenden Zeitfunktionen auf. Diese Fehler sind auf die Bildung rechtechnisch ungünstiger Koeffizientenmatrizen, die den Ausgangspunkt des Unterprogramms zur Lösung des linearen Gleichungssystems bilden, zurückzuführen. Bei Benutzung der Einsetzungsmethode und bei einer im Prinzip willkürlich festgelegten Bildungsvorschrift für  $p$  erhält man häufig annähernd linear abhängige Gleichungen. In diesem Fall befindet sich der Rechner im Unterprogramm zur Lösung eines linearen Gleichungssystems in einem relativ labilen Bereich, d. h. es können sehr große Rechenfehler auftreten. Hinzu kommt, daß die Konstanten (Matrixelemente) von unterschiedlicher Größenordnung sind; das bewirkt eine weitere wesentliche Fehlererhöhung bei der Berechnung der Konstanten. Auch durch eine Bildungsvorschrift für  $p$ , die von der Wahl der

Zeitkonstanten der Übertragungsfunktion abhängig ist, ist das Problem nicht entgültig lösbar.

Aus diesem Grunde wurde im Rechnerprogramm eine interne Zeitnormierung vorgenommen, wobei die Normierungszeit  $T_{\text{norm}}$  von den Eingabedaten abhängig ist. Für  $p$  wird eine von den Eingabedaten unabhängige Bildungsvorschrift benutzt. So wird es möglich, die Elemente der Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems in rechtechnisch günstigen Bereichen zu halten.

### 4. Bemerkungen zur Programmorganisation

Das Programm wurde in der maschinenorientierten Programmiersprache für den Kleinrechner C 8205 geschrieben. Wegen des großen Speicherplatzbedarfs wurde eine Aufteilung in zwei Programmteile vorgenommen.

Zu Beginn des 1. Programmteils muß der Rechner mit folgenden Unterprogrammen geladen werden:  $n$ -te Wurzel aus  $x$ ,  $e^x$ -Programm,  $\ln x$ -Programm, lineares Gleichungssystem. Danach wird der Lochstreifen für den Programmablauf des 1. Programmteils (Hauptprogramm), dann der Eingabestreifen mit den aktuellen Parametern eingelesen. Nach der Beendigung des ersten Programmteils wird ein Lochstreifen mit den im Unterprogramm für die Lösung des linearen Gleichungssystems errechneten Konstanten in interner Darstellung ausgegeben.

Für den zweiten Programmteil werden folgende Unterprogramme benötigt: Wurzel aus  $x$ ,  $e^x$ -Programm,  $\ln x$ -Programm,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\arctan x$ . Nach der Ladung des Rechners mit diesen Unterprogrammen wird das Hauptprogramm des 2. Programmteils und der am Ende des 1. Programmteils ausgedruckte Lochstreifen eingelesen, die Ausgabe erfolgt nach Beendigung des 2. Programmteils über das Schreibwerk des Rechners. Als aktuelle Parameter werden eingegeben:

1. Parameter der Übertragungsfunktion im Zähler und im Nenner, Vielfachheiten der Pole, Schwingungsglieder usw.
2. Gewünschte Systemreaktion (Übergangsfunktion, Gewichtsfunktion o. ä.)
3. Gewünschte Darstellungszeit der Systemreaktion und Schrittweite.

### 5. Ergebnisse

Das Verfahren wurde an einer Vielzahl der verschiedensten Beispiele getestet. Dazu wurde zur Überprüfung die Rücktransformation zusätzlich noch auf dem meist üblichen Wege mit Korrespondenztabelle durchgeführt. Die so erhaltene Zeitfunktion wird vereinfachend als die exakte Zeitfunktion bezeichnet, deren Werteverlauf mittels der vorhandenen Unterprogramme ebenfalls über den Rechner ermittelt werden kann.

Die durch das Programm errechneten Zeitfunktionen wiesen bei allen Beispielen nur sehr geringe Abweichungen auf. Der Zusammenhang zwischen wachsendem Fehler und wachsendem Nennergrad von  $X_n(p)$  wurde bestätigt. Dennoch trat bei einem Nennergrad von sieben ein Fehler, bezogen auf den größten Funktionswert, von nur  $3 \cdot 10^{-4}$  auf. Bei einem Nennergrad von elf war das Programm allerdings überfordert, die ausgedruckte Wertetabelle lieferte nicht einmal Anhaltspunkte über den realen Funktionsverlauf von  $x_n(t)$ .

Aus dem Vergleich des vorgestellten Algorithmus mit anderen, aus der Literatur bekannten Verfahren [6-7] geht hervor, daß dieses Programm einen für technische Anwendungen günstigen Kompromiß zwischen erforderlicher Genauigkeit und rechen-technischem Aufwand darstellt.

#### Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde ein Programm zur numerischen Laplace-Rücktransformation vorgestellt. Der angegebene Algorithmus beruht auf dem Verfahren der Zerlegung der Bildfunktion in Partialbrüche, die dann getrennt rücktransformiert werden. Die Summe der entstehenden Teilfunktionen ist die gesuchte Zeitfunktion.

Auftretende Probleme, hervorgerufen durch rechen-technisch ungünstige Formen eines zu lösenden Gleichungssystems, werden durch entsprechende Normierung mit einem Hilfsparameter weitgehend eingeschränkt. Die praktische Anwendungsgrenze liegt bei einem Nennergrad der Bildfunktion von sieben bis acht.

#### Резюме

В работе представлена программа цифровой обратной трансформации по Лапласу. Данный алгоритм основан на разложении функции отображения на элементарные дроби, каждая из которых после этого отдельно обратно трансформируется. Сумма образованных под-функций является искомым функцией времени.

Проблемы, возникающие из-за трудности использования вычислительной техники, вызываемой неблагоприятными формами решаемой системы уравнений, значительно уменьшаются с помощью соответственной нормировки со вспомогательным параметром. Практический предел применения находится при степени знаменателя функции отображения от 7 до 8.

Abschließend möchten die Verfasser auf diesem Wege Frau Ing. Will und Herrn Dr. Ing. Lübeck von der Sektion Schiffstechnik für ihre Mitarbeit bei der Programmierung und für die Durchführung der numerischen Rechnungen im Lehrrechnerkabinett der Sektion Schiffstechnik danken.

A77-31267

#### Summary

This paper presents a program for the numerical Laplace return transformation. The algorithm described is based on the method of breaking the picture function down to form partial fractions which are then transformed back separately. The sum of the resulting partial functions is the sought time function.

Any problems caused by the forms of a system of equations being unfavourable due to the computer configuration are restricted to a large extent by appropriate standardisation using an auxiliary parameter. The practical limits for use of the program are reached when the degree of the denominator of the picture function lies within the range of seven to eight.

#### Résumé

L'article présente un programme de transformation numérique inverse de Laplace. L'algorithme donné se base sur le procédé de décomposition de la fonction d'image en fractions partielles, qui sont ensuite retransformées séparément.

La somme des fonctions partielles obtenues est la fonction de temps cherchée.

Des problèmes causés par des formes de calcul désavantageuses d'un système d'équation à résoudre sont largement réduits grâce à la standardisation adéquate, effectuée à l'aide d'un paramètre auxiliaire. La limite d'application pratique se situe à un degré de dénominateur de la fonction d'image entre sept et huit.

#### Literatur

- [1.] REINISCH, K.:  
Kybernetische Grundlagen und Beschreibung kontinuierlicher Systeme  
Verlag Technik Berlin, 1974
- [2.] NIXON, F. E.:  
Beispiele und Tafeln zur Laplace-Transformation  
Franck'sche Verlagshandlung Stuttgart, 1964
- [3.] SCHNEIDER, F.:  
Digitale Rechenverfahren in der Regelungstechnik  
Habilitationsschrift, München 1970
- [4.] STEPANEK, E.:  
Numerische Berechnung von Einschwingvorgängen  
Z. elektr. Inform.- u. Energietechnik, 5, (1975), H. 1, S. 60-75
- [5.] STALLBAUM, H. und NADOLNY, W.:  
Numerische Umkehrung der Laplace-Transformation unter Verwendung der Sattelpunktmethode  
Diplomarbeit, Rostock 1974, Sektion Mathematik
- [6.] VASKE, B. und WILLOPER, J.:  
Numerische Umkehrung der Laplace-Transformation  
Diplomarbeit, Rostock 1973, Sektion Mathematik
- [7.] BRUNZEL, I. und SCHMIDT, E.:  
Numerische Rücktransformation der Laplace-Transformation durch Approximation im Originalbereich  
Diplomarbeit, Rostock 1974, Sektion Mathematik

Verfasser: Dr.-Ing. Ralf Friedrich  
Dipl.-Ing. Wolfgang Drewelow  
Sektion Technische Elektronik der  
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

END

---

DATE

FILMED

NOV 23

1977